SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mladena Miletić

MITTAG - LEFFLEROV RAZVOJ

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Goran Muić

Zagreb, rujan, 2014

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Neka je S diskretan podskup u $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da za svaku točku $s \in S$ imamo zadan glavni dio Laurentovog razvoja $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$, Mittag - Lefflerov problem je konstrukcija analitičke funkcije $f : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$ koja u točkama $s \in S$ ima zadani glavni dio Laurentovog razvoja $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$. Cilj ovog rada je prikazati rješenje ovog problema.

Prvi dio, uvodni, sastoji se od definiranja pojmova i iskaza rezultata koji su nam potrebni za izgradnju teorije. Počinjemo od same definicije skupa kompleksnih brojeva, ponavljamo osnovne definicije računskih operacija te se bavimo derivacijama i integralima kompleksnih funkcija. Navodimo poznate teoreme poput Cauchy - Riemannovg teorema 1.3.13, koji daje karakterizaciju derivabilnosti kompleksne funkcije u točki pomoću Cauchy - Riemannovih uvjeta, te činjenice da je svaka derivabilna funkcija analitička. Vezano za integrale kompleksnih funkcija, iznosimo Cauchyjev integralni teorem iz kojeg slijedi da ako znamo kako se kompleksna diferencijabilna funkcija ponaša na rubu kruga, tada znamo kako se ponaša unutar kruga. Definirat ćemo analitičke funkcije 1.2.10, a koje su jedan od važnijih objekata u kompleksnoj analizi. Posebno svojstvo kompleksnih funkcija, a koje ne vrijedi za realne funkcije realne varijable, je to da ako je funkcija f diferencijabilna (tj. ima prvu derivaciju u svakoj točki domene $\Omega \subseteq \mathbb{C}$) onda ima i sve ostale derivacije višeg reda. Također, promatramo nizove i redove (analitičkih) funkcija te iznosimo Weierstrassov teorem o limesu niza analitičkih funkcija 1.3.8, koji govori da ako niz analitičkih funkcija konvergira lokalno uniformno nekoj funkciji f da je tada f analitička funkcija. U nastavku se bavimo redovima, dajemo definiciju reda potencija i iznosimo Taylorov teorem 1.4.1 koji daje formulu za razvoj analitičke funkcije u red potencija oko neke točke. Spomenimo i korolar koji govori da je funkcija f analitička ako i samo ako se može razviti u red potencija.

U zadnjem dijelu prvog poglavlja bavimo se singularitetima kompleksnih funkcija. Najveći fokus je na izoliranim singularitetima - uklonjivim singularitetima, polovima i bitnim singularitetima. Također, dajemo definiciju meromorfne funkcije i kažemo da je funkcija f meromorfna na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u Ω i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.

U drugom dijelu počinjemo s iskazom i dokazom teorema 2.1.3 Mittag - Lefflerovog razvoja za konačan skup S te ćemo nešto kasnije isto dokazati za beskonačan skup S (teorem 2.1.5). Glavni rezultat tog dijela govori da za svaku proizvoljnu točku s diskretnog skupa $S \subseteq \mathbb{C}$ možemo fiksirati cijelu funkciju h_s tako da tada postoji analitička funkcija f s glavnim dijelom Laurentovog razvoja u svakoj točki. Ta analitička funkcija definirana je preko činjenice da $f(z) - h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$ ima uklonjivu singularnost u $z = s$.

Velika zahvala mom profesoru i mentoru, prof. dr. sc. Goranu Muiću, na ukazanoj pomoći i strpljenju prilikom nastanka ovog rada.

Poglavlje 1

Svojstva analitičkih funkcija

1.1 Osnovna svojstva skupa kompleksnih brojeva

U ovom poglavlju definirat ćemo skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima i njihova svojstva.

Skup kompleksnih brojeva označujemo s $\mathbb{C}$. To je skup svih brojeva oblika $z = x + iy$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$. **Realni dio** kompleksnog broja z je realni broj $x = \operatorname{Re} z$, dok je **imaginarni dio** kompleksnog broja z realni broj $y = \operatorname{Im} z$. Dva kompleksna broja su jednaka ako su im jednaki realni i imaginarni dijelovi.
Konjugirano kompleksni broj broja $z = x + iy$ je broj $\bar{z} = x - iy$.
Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja z je nenegativni realni broj definiran kao

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Neka su $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ dva kompleksna broja. Računske operacije su definirane na sljedeći način:

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$,
- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$,
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$,
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \text{za} \quad z_2 \neq 0.$

Iz toga slijedi da je sa $|z - z_0|$ dana jednadžba kružnice $S(z_0, r)$ radijusa r sa središtem u točki z_0. Dakle,

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = r\}.$$

Isto tako je sa

$$K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\}$$

dana otvorena krug oko z_0 radijusa r .

Unija kruga $K(z_0, r)$ i kružnice $S(z_0, r)$ je zatvoreni krug

$$\overline{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| \leq r\}$$

radijusa r sa središtem u točki z_0. Za skup Ω sadržan u $\mathbb{C}$ kažemo da je otvoren ako oko svake točke iz Ω možemo opisati otvoreni krug koja je sadržana u Ω. Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup. Rub skupa S, u oznaci ∂S, definiramo kao presjek zatvarača od S i zatvarača od S^c, pri ćemu je zatvarač od S najmanji zatvoren skup koji sadrži S. Za skup K, sadržan u $\mathbb{C}$, kažemo da je kompaktan ako on ima svojstvo da svaki niz, čiji članovi su elementi iz K, ima konvergentan podniz čiji limes je također element iz K. Familija $(U_j, j \in J)$ skupova iz $\mathbb{C}$ zove se pokrivač skupa S sadržanog u $\mathbb{C}$ ako je skup S sadržan u uniji skupova te familije, to jest ako je $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$.

I za funkciju $f : \mathbb{C} \supseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ često pišemo $f = u + iv$, tj. $f(z) = (u(z), v(z))$, gdje su $u, v : S \to \mathbb{R}$ realne funkcije, jedne kompleksne, odnosno dvije realne varijable. Kako se topološke strukture prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{C}$ podudaraju, vrijedi da je funkcija f neprekidna ako i samo ako su obje funkcije u i v neprekidne.

1.2 Derivacije i integrali kompleksnih funkcija

Definicija 1.2.1. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pri čemu je Ω sadržan u $\mathbb{C}$, kažemo da je* ***derivabilna u točki*** $z_0 \in \Omega$ *ako u $\mathbb{C}$ postoji*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ukoliko ovaj limes postoji, označavamo ga sa $f'(z_0)$ i zovemo ***derivacija*** *funkcije f u točki z_0.*
Za funkciju kažemo da je ***derivabilna****, ako je derivabilna u svim točkama svoje domene.*

Direktno iz definicije slijedi da se derivabilnost čuva sumom, produktom, kompozicijom, te da je svaka derivabilna funkcija neprekidna.

Teorem 1.2.2. *(Cauchy - Reimannov teorem)*
Kompleksna funkcija $f \stackrel{\text{def}}{=} u + iv$ koja ide sa Ω u $\mathbb{C}$ derivabilna je u točki $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ako i samo ako su funkcije u i v, kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u točki (x_0, y_0) i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete:

- $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
- $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

Tada vrijedi:

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0).$$

Ovaj rezultat poznat je u literaturi kao **Cauchy-Riemannov teorem**.

Definicija 1.2.3. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, pri čemu je Ω otvoren podskup u $\mathbb{C}$, kažemo da je* ***analitička*** *ukoliko je derivabilna i njena derivacija je neprekidna na Ω.*

Za funkciju f kažemo da je ***analitička u točki*** *z_0 iz Ω ukoliko postoji okolina od z_0 na kojoj je f analitička.*

Teorem 1.2.4. *Svaka derivabilna funkcija je analitička.*

Definicija 1.2.5. *Za kompleksnu funkciju f sa $[a,b]$ u $\mathbb{C}$, pri čemu su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$, kažemo da je **integrabilna** ako su Ref i Imf sa $[a,b]$ u $\mathbb{R}$ integrabilne kao realne funkcije u Riemannovom smislu. Tada je integral definiran sa:*

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^b Ref(x)dx + \int_a^b Imf(x)dx.$$

Posebno, vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Također, nasljeđuju se i ostala pravila za računanje poput:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx,$$

pri čemu su f i g neprekidne funkcije sa $[a,b]$ u $\mathbb{C}$ i λ kompleksan broj.
Isto tako, ako je F primitivna funkcija od f, onda vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Definicija 1.2.6. *Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da ima **primitivnu funkciju** na Ω, ako postoji funkcija $F : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da je $F'(z) = f(z)$ za sve $z \in \Omega$. Funkcija f ima na **lokalno primitivnu funkciju**, ako oko svake točke $z \in \Omega$ postoji okolina (npr. otvoreni krug) na kojoj f ima primitivnu funkciju.*

Definicija 1.2.7. ***Put*** *u Ω je nepekidno preslikavanje $\gamma : [a,b] \to \Omega$ tako da za svaki $t \in [a,b]$ vrijedi da je $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Funkcije α i β su neprekidne funkcije definirane na $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

Teorem 1.2.8. *Za neprekidnu funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$, sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*
i.) f ima primitivnu funkciju na Ω.
ii.) Integral od f po svakom zatvorenom putu je jednak 0.
iii.) Integral od f po bilo kojem putu ovisi samo o početnoj i krajnjoj točki.

Teorem 1.2.9. *(Cauchyjeva integralna formula)*
Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diferencijabilna funkcija na proizvoljnom nepraznom otvorenom skupu Ω. Tada za svaki $z_0 \in \Omega$ i svaki $\overline{K}(z_0, r) \subset \Omega$ vrijedi sljedeća formula:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)} dw, \quad \forall z \in K(z_0, r)$$

Napomena 1.2.10. *Gornji teorem govori da ako znamo kako diferencijabilna funkcija izgleda na rubu kruga tada znamo kako se ponaša unutar kruga (ne vrijedi za realne funkcije). U iskazu gornjeg teorema γ predstavlja zatvorenu, pozitivno orijentiranu kružnicu, tj.*

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Definicija 1.2.11. *Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***holomorfna*** *ako je derivabilna i derivacija f' je neprekidna na Ω. Za funkciju f kažemo da je* ***holomorfna u točki*** *z_0 ako postoji okolina točke z_0 na kojoj je f holomorfna. Funkcije koje su holomorfne na čitavoj kompleksnoj ravnini zovu se* ***cijele funkcije****.*

Napomena 1.2.12. *Umjesto naziva holomorfna, često se koristi i naziv* ***analitička funkcija****. Taj ćemo naziv i mi koristiti, a razlog tome je korolar 1.4.2.*

Definicija 1.2.13. *Skup svih funkcija holomorfnih na otvorenom skupu Ω, označavat ćemo s $H(\Omega)$.*

1.3 Konvergencija nizova i redova funkcija

Dok za nizove kompleksnih brojeva imamo samo jedan tip konvergencije:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a, \text{ ako za } \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } |a_n - a| < \varepsilon,$$

za nizove kompleksnih funkcija imamo **tri vrste** konvergencija: konvergenciju obično (ili po točkama), uniformnu konvergenciju i lokalno uniformnu konvergenciju.

Definicija 1.3.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ neki skup i $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$* ***konvergira (obično ili po točkama)*** *ako za svaki $z \in S$ niz brojeva $(f_n(z))_n$ konvergira. U tom slučaju, funkciju $f : S \to \mathbb{C}$ definiranu s $f(z) \overset{\text{def}}{=} \lim_n f_n(z)$ zovemo limes niza $(f_n)_n$, i označavamo s $f = \lim f_n$. Pišemo: $f_n \longrightarrow f$ ili $f_n \xrightarrow{n} f$.*

Definicija 1.3.2. *Za niz funkcija $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, kažemo da* ***konvergira uniformno ili jednoliko*** *na S, ako postoji funkcija $f : S \to \mathbb{C}$, takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $z \in S$ i sve $n \geq n_0$ vrijedi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.*

Očito je da ako niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, onda taj niz konvergira i obično, dok obrat ne vrijedi.

Definicija 1.3.3. *Neka je $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija. Kažemo da niz $(f_n)_n$* ***konvergira lokalno uniformno*** *na S, ako za svaki $z \in S$ postoji $r_z > 0$ takav da niz restrikcija $f_n|_{K(z,r_z)\cap S}$ konvergira uniformno na $S_z \overset{\text{def}}{=} K(z, r_z) \cap S$.*

Napomena 1.3.4. *Lokalno uniformna konvergencija znači da oko svake točke postoji okolina i na toj okolini neka funkcija kojoj niz restrikcija uniformno konvergira. Očito je da ako neki niz funkcija konvergira uniformno, onda on konvergira i lokalno uniformno. Obrat ne vrijedi.*

Teorem 1.3.5. *(Karakterizacija lokalno uniformne konvergencije)*
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\geq 1}$ *niz funkcija,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *Vrijede ekvivalencije:*
i.) $f_n \longrightarrow f$ *lokalno uniformno na* Ω.
ii.) $\forall K \subset \Omega$, K *kompaktan,* $f_n \longrightarrow f$ *uniformno na* K.
iii.) Za svaki zatvoreni krug $\overline{K}(z,r) \subset \Omega$, $f_n \longrightarrow f$ *uniformno na* $\overline{K}(z,r)$.

Teorem 1.3.6. *Neka je* $f_n : S \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, *niz neprekidnih funkcija koji lokalno uniformno konvergira funkciji* $f_n : S \to \mathbb{C}$. *Tada je i funkcija f neprekidna.*

Napomena 1.3.7. *Sve do sada rečeno vrijedi i za redove (jer su redovi poseban slučaj nizova). Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren,* $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_{n\geq 1}$ *niz funkcija. Tada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *ako niz parcijalnih suma* $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_{n\geq 1}$ *konvergira lokalno uniformno. Posebno, ako su* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *neprekidne na* Ω *i ako* $\sum_n f_n$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *onda je i zadana funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *neprekidna na* Ω.

Teorem 1.3.8. *(Weierstrassov teorem o limesu niza analitičkih funkcija)*
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f_n \in H(\Omega), n \in \mathbb{N}$, *niz analitičkih funkcija koji na* Ω *konvergira lokalno uniformno funkciji* $f : \Omega \to \mathbb{C}$. *Tada je i* f *analitička funkcija,* $f \in H(\Omega)$. *Štoviše, niz derivacija* $(f_n')_n$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *funkciji* f', *tj. vrijedi:*

$$\lim_n f_n' = (\lim_n f_n)'$$

Teorem 1.3.9. *(Weierstrassov M-test, test o uniformnoj konvergenciji reda)*
Neka je $(f_n : K(z_0, \mathbb{R}) \to \Omega)_{n\geq 1}$ *niz analitičkih funkcija na* $K(z_0, \mathbb{R})$. *Pretpostavimo da postoji niz nenegativnih realnih brojeva* $(M_n)_{n\geq 1}$ *takvih da:*

(1) $|f_n(z)| \leq M_n, \qquad \forall z \in K(z_0, R), \forall n = 1, 2, \ldots$
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$.

Tada red $\sum_n f_n$ *konvergira uniformno na* $K(z_0, \mathbb{R})$.

Korolar 1.3.10. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *otvoren skup i* $f_n \in H(\Omega), n \in \mathbb{N}$*, niz analitičkih funkcija takvih da red* $\sum f_n$ *lokalno uniformno konvergira. Tada je i suma reda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *analitička funkcija na* Ω*, red* $\sum f_n$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *i* $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$*, tj.*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Definicija 1.3.11. ***Red potencija*** *je red oblika* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$*, gdje su* z_0 *i* a_n *kompleksni brojevi.*

Teorem 1.3.12. *(Abelova lema)*
Ako red potencija $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konvergira za neki* $z' \neq z_0$*, onda taj red konvergira apsolutno i lokalno uniformno na čitavom krugu* $K(z_0, r)$*, gdje je* $r := |z' - z_0|$*.*

Teorem 1.3.13. *(Cauchy-Hadamardov teorem)*
Neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *red potencija i neka je*

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(dogovorno uzimamo $r \overset{\text{def}}{=} 0$ *ukoliko je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$*, a* $r \overset{\text{def}}{=} +\infty$ *ako je* $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$*). Tada:*
1. red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konvergira apsolutno i lokalno uniformno na krugu* $K(z_0, r)$*, i*
2. red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *divergira za svaki* $z \in \mathbb{C}$ *za koji je* $|z - z_0| > r$*.*

Napomena 1.3.14. *Broj r zove se* ***radijus konvergencije****, a* $K(z_0, r)$ ***krug konvergencije*** *reda potencija.*

Teorem 1.3.15. *(O analitičnosti sume reda potencija)*
Neka red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *ima radijus konvergencije* $r > 0$. *Tada je funkcija* $f : K(z_0, r) \to \mathbb{C}$ *definirana s*

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

analitička na $K(z_0, r)$*, i njena derivacija jednaka je*

$$f'(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Pritom, radijus konvergencije za f' *je također jednak* r*.*

1.4 Razvoji kompleksnih funkcija u redove potencija

Pokazat ćemo najprije da se svaka funkcija, koja je analitička na nekom krugu, može na tom krugu prikazati kao suma reda potencija.

Teorem 1.4.1. *(Taylorov teorem)*
Neka je funkcija f analitička na krugu $K(z_0, r)$. Tada za svaki $z \in K(z_0, r)$ vrijedi:

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani formulama:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad \textit{pritom je} f^{(0)} \overset{\text{def}}{=} f(z_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \end{aligned}$$

gdje je Γ_0 proizvoljna pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 radijusa manjeg od r. To je ***Taylorov red funkcije f*** *u točki z_0.*

Najčešće ćemo Taylorov red pisati kao:

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

Korolar 1.4.2. *(Analitičnost holomorfne funkcije)*
Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je holomorfna u točki $z_0 \in \Omega$ ako i samo ako postoji red potencija $\sum a_n (z - z_0)^n$ s radijusom konvergencije $r > 0$ takav da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

za sve z iz neke okoline točke z_0.

Ovaj korolar pokazuje da je svaka derivabilna kompleksna funkcija ne samo holomorfna i da ima derivacije svih redova, nego je svaka takva funkcija ujedno i analitička, tj. može se razviti u red potencija, što je mnogo više.

Teorem 1.4.3. *(Liouvilleov teorem)*
Ako je funkcija f analitička na čitavoj kompleksnoj ravnini $\mathbb{C}$ i ako je ograničena, onda je f konstantna funkcija.

Liouvilleov teorem ne kaže da su ograničene analitičke funkcije nužno konstantne. Samo ograničene funkcije koje su analitičke na čitavoj kompleksnoj ravnini su konstantne. Funkcije koje su analitičke na čitavoj kompleksnoj ravnini zovu se **cijele ili čitave funkcije**. Liouvilleov teorem kaže da su "prave", tj. nekonstantne, cijele funkcije, uvijek neomeđene.

Pri proučavanju funkcija koje su analitičke na nekom krugu oko točke z_0, koristi se razvoj u Taylorov red - red (pozitivnih) potencija od $z - z_0$. Medutim, ako je funkcija u točki z_0 "loša", ali je u drugim točkama analitička, koriste se redovi u kojima se osim pozitivnih, pojavljuju i negativne potencije.

Napomena 1.4.4. *Uvedimo neke oznake: Neka su $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$, kompleksni brojevi.* ***Dvostrani red**, tj. red u kojem su članovi numerirani (indeksirani) cijelim brojevima, u oznaci $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$, označavat će sumu dvaju redova, reda $\sum_{n\geq 0} c_n$ i reda $\sum_{n\leq -1} c_n$ Za red $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ kažemo da konvergira, ako konvergiraju oba reda $\sum_{n\geq 0} c_n$ i $\sum_{n\leq -1} c_n$, a sumu ćemo označavati sa*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Pritom je

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=-1}^{-n} c_k.$$

Definicija 1.4.5. *Za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i pozitivne brojeve $0 < r < R$, označavat ćemo s $V \stackrel{\text{def}}{=} V(z_0; r, R)$* ***kružni vijenac**, tj. skup $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.*

Teorem 1.4.6. *(Laurentov teorem)*
Neka je funkcija f analitička na kružnom vijencu $V \overset{\text{def}}{=} V(z_0; r, R)$ oko točke z_0. Tada za svaki $z \in V$ vrijedi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani formulom

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

a Γ_0 je pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ, $\quad r < \rho < R$. To je ***Laurentov red*** *funkcije f oko točke z_0.*

Laurentov teorem vrijedi i u slučaju kada se umjesto kružnog vijenca $V \overset{\text{def}}{=} V(z_0; r, R)$ radi o probušenom krugu $K^*(z_0, R) \overset{\text{def}}{=} K(z_0, R) \backslash \{z_0\}$, na koji možemo gledati i kao na degenerirani vijenac s $r = 0$. Najčešće ćemo Laurentov red i promatrati upravo na nekom $K^*(z_0, R)$. Odsada ćemo, za točku $z_0 \in \mathbb{C}$ i realne brojeve $0 < r < R$, vijencem $V \overset{\text{def}}{=} V(z_0; r, R)$ zvati otvoren skup, koji je u slučaju $r > 0$ pravi vijenac, a za $r = 0$ je to, zapravo, probušeni krug $K^*(z_0, R)$.

Teorem 1.4.7. *(O jedinstvenosti Laurentovog reda)*
i) Ako za svaki $z \in V \overset{\text{def}}{=} V(z_0; r, R)$ vrijedi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

onda je $a_n = b_n$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

ii) Ako je funkcija f analitička na vijencu V, onda je $f = f_1 + f_2$, gdje je f_2 analitička na krugu $K(z_0, R)$, a f_1 je analitička izvan zatvorenog kruga $K(z_0, r)$, tj. za $|z - z_0| > r$. Štoviše, ako je $\lim\limits_{|z| \longrightarrow \infty} f_1(z) = 0$, onda je rastav $f = f_1 + f_2$ jedinstven. Funkcija f_1 naziva se ***glavni*** *ili* ***singularni dio****, a funkcija f_2* ***regularni dio*** *funkcije f.*

Napomena 1.4.8. *Teorem o jedinstvenosti Laurentovog reda, vrlo je koristan, kako teoretski, tako i u primjenama. Pokazuje da je svaki red pozitivnih i negativnih potencija, koji funkciji f konvergira na nekom vijencu ili (probušenom) krugu, upravo Laurentov red te*

funkcije. Tu je sadržan i teorem o jedinstvenosti Taylorovog reda jer i Taylorov red, red sa samim nenegativnim potencijama, također Laurentov red, samo što su svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki nuli. Ako krenemo razviti funkciju f u Laurentov red oko neke točke u kojoj je ona analitička, kao rezultat dobit ćemo njen Taylorov red, tj. dobit ćemo da su koeficijenti uz sve negativne potencije jednaki nuli.
Također, kada trebamo neku funkciju razviti u red potencija (pozitivnih i negativnih) kako ispadne, onda tome obično ne pristupamo tako da počnemo derivirati ili integrirati, nego se nastojimo dočepati traženog reda koristeći neke, od ranije poznate, redove:

Primjer 1.4.9. *Odredimo Laurentov red funkcije*

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

oko 0.
Budući da f nije definirana u 1 i u 2, razvit ćemo ju u redove na krugu $K(0,1)$ i na vijencima $V(0;1,2)$ i $V(0;2,+\infty)$. Za drugi sumand, za $|z| < 1$, je $-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$, dok je za $|z| > 1$,

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n.$$

Za prvi sumand, $\frac{1}{z-2}$, za $|z| < 2$ vrijedi

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},$$

a za $|z| > 2$ je

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

Zbrajanjem, na sva tri područja, odgovarajućih redova, dobivamo

$$f(n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n & , \quad |z| < 1 \\ \displaystyle -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n & , \quad 1 < |z| < 2 \\ \displaystyle\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)z^n & , \quad 2 < |z| \end{cases}$$

Ako želimo tu istu funkciju razviti u red, na primjer, na probušenom krugu $K^*(1,1)$*, dakle po potencijama od* $z-1$*, onda za prvi sumand nalazimo*

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,$$

dok je drugi sumand već zapisan kao red potencija od $z-1$*, a svi koeficijenti* a_n*, osim* a_{-1}*, jednaki su nuli, i* $a_{-1} = -1$*. Tako dobivamo*

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 1.$$

Kao i u slučaju Taylorova reda, i kod Laurentova reda dokazuju se sljedeće ocjene za koeficijente:

Teorem 1.4.10. *(Cauchyjeve ocjene koeficijenata Laurentova reda)*
Neka je $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *za* $0 \leq r < |z-z_0| < R$*, i neka je za* $r < \rho < R$*,*
$M(\rho) := max\{|f(z)| : |z-z_0| = \rho\}$ *. Tada je*

$$|a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \quad za \quad sve \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.5 Singulariteti

Kako bismo mogli govoriti o tome je li neka točka z_0 singularitet funkcije f ili nije, točka z_0 mora biti okružena točkama u kojima f jeste definirana. Singulariteta ima različitih, a mi ćemo prvenstveno promatrati tzv. izolirane singularitete:

Definicija 1.5.1. *Za točku z_0 kačemo da je **izoliran singularitet** funkcije f, ako je f analitička na nekom probušenom krugu $K^*(z_0, R)$ oko točke z_0.*

Postoje tri vrste izoliranih singulariteta: uklonjivi, polovi i bitni singulariteti. Počnimo redom:

Definicija 1.5.2. *Za izoliran singularitet z_0 funkcije f kažemo da je **uklonjiv**, ako u točki z_0 možemo funkciju f predefinirati ili, ako u z_0 nije bila definirana, dodefinirati, tako da postane analitička na nekom (pravom, neprobušenom) krugu $K(z_0, R)$ oko točke z_0. Drugim riječima, singularitet je uklonjiv ako ga možemo ukloniti.*

Teorem 1.5.3. *(Karakterizacija uklonjivih singulariteta)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:
i) z_0 je uklonjiv singularitet funkcije f.
ii) Postoji limes $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$.
iii) f je omeđena na nekoj okolini točke z_0.
iv) $\lim\limits_{z \longrightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.
v) U Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 nema negativnih potencija, tj. svi koeficijenti uz negativne potencije jednaki su nuli.

Definicija 1.5.4. *Za izolirani singularitet z_0 funkcije f kažemo da je **pol**, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, tj. s potencijama od $\dfrac{1}{(z - z_0)}$.*
***Red pola** je red najveće potencije od $\dfrac{1}{(z - z_0)}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule.*

Teorem 1.5.5. *(Karakterizacija polova)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:
i) z_0 je pol funkcije f (reda m).
ii) z_0 nije uklonjiv singularitete funkcije f, ali postoji prirodan broj k takav da je z_0 uklonjiv singularitet funkcije $z \longmapsto (z - z_0)^k f(z)$. (Najmanji takav k upravo je m-red pola).
iii) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Definicija 1.5.6. *Za funkciju f kažemo da je **meromorfna** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u Ω, i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.*

Što znači da je f meromorfna na otvorenom skupu Ω, ako postoji $A \subseteq \Omega$ takav da vrijedi:
(1) A nema gomilišta u Ω
(2) $f : \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ je analitička.
(3) f ima pol u svakoj točki skupa A.

Tipični primjeri meromorfnih funkcija su racionalne funkcije. One, ako su brojnik i nazivnik relativno prosti, tj. razlomak je „skraćen do kraja“, od singulariteta imaju samo polove, i to u nultočkama nazivnika.

Primjer 1.5.7. *Funkcija $z \longmapsto \dfrac{1}{\sin z}$ Također je meromorfna na $\mathbb{C}$, jer ona, od singulariteta u $\mathbb{C}$, ima samo polove, i to u nultočkama funkcije sinus.*
Treba ipak malo pripaziti. Funkcija $z \longmapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ meromorfna je na $f : \mathbb{C} \setminus 0 \to \mathbb{C}$, ali nije meromorfna na $\mathbb{C}$, jer 0 jeste singularitet te funkcije, ali nije izoliran (pa ne može biti pol niti uklonjivi singularitet.

Definicija 1.5.8. *Za izoliran singularitet z_0 kažemo da je **bitan singularitet** ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, tj. beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije je različito od nule.*

Teorem 1.5.9. *(Casorati - Weierstrass - Sohockij)*
Neka je funkcija f analitička na probušenom krugu $K^*(z_0, R)$. Točka z_0 je bitan singularitet funkcije f ako i samo ako je za svaki $\delta > 0$, slika probušenog kruga $K^*(z_0, \delta)$ gusta na $\mathbb{C}$, tj. za svaki $\omega \in \mathbb{C}$ i svaki $\varepsilon > 0$, postoji $z \in K^*(z_0, \delta)$, takav da je $|f(z) - \omega| < \varepsilon$.

Primjeri funkcija s bitnim singularitetom su $z \longmapsto e^{\frac{1}{z}}$ i $z \longmapsto \sin \frac{1}{z}$.
Obje ove funkcije imaju bitan singularitet u 0, što se jednostavno vidi iz njihovih Laurentovih razvoja.

Primjer 1.5.10. $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{6z^3} + ... , z \in \mathbb{C}$
i očito da funkcija $z \longmapsto e^{\frac{1}{z}}$ u točki $z = 0$ ima bitan singularitet.

Primjer 1.5.11. $\sin \frac{1}{z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{6z^3} + \dfrac{1}{120z^5} - ... \in \mathbb{C}$
i opet se vidi da funkcija $z \longmapsto \sin \frac{1}{z}$ ima bitan singularitet u točki $z = 0$.

Poglavlje 2

Mittag - Lefflerov razvoj

2.1 Mittag - Lefflerov razvoj

Definicija 2.1.1. *Točka $z_0 \in \mathbb{C}$ je gomilište skupa S, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $z \in S$ tako da je $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je* ***diskretan*** *ako je neprazan i nema gomilište.*

Napomena 2.1.2. *Za svaki $s \in S$ postoji $\varepsilon_s > 0$ tako da je $K(s, \varepsilon_s) \cap S = \{s\}$.*
Dakle, skup S je prebrojiv te ga možemo ga zapisati kao $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$, gdje su $|s_1| \leq |s_2| \leq |s_3| \ldots$. Moguće je da je skup S konačan.

Pretpostavimo da je skup S beskonačan. Uočimo da je $\lim\limits_n |s_n| = +\infty$. Zaista, ako ne, onda je $\lim\limits_n |s_n| = r$. Odavdje slijedi da svi elementi skupa S leže u kompaktnom skupu $\overline{K}(0, r)$, iz čega pak proizlazi da niz (s_n) ima konvergentan podniz.
Sjetimo se da su svi članovi niza (s_n) međusobno različiti jer smo tako numerirali točke iz S. Ako $s_{n_k} \longrightarrow z_0$ kad $k \longrightarrow +\infty$, onda bi dobili kontradikciju s diskretnošću.

Teorem 2.1.3. *(Mittag - Lefflerov razvoj, M.G. Mittag - Leffler, 1877)*
Neka je S konačan podskup skupa $\mathbb{C}$. Za svaku proizvoljnu točku $s \in S$ fiksiramo cijelu funkciju

$$h_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad h_s(0) = 0,$$

Tada postoji analitička funkcija

$$f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C},$$

s glavnim dijelom Laurentovog razvoja u svakoj $s \in S$ definiranoj s h_s, a preko činjenice da

$$f(z) - h_s\left(\frac{1}{z-s}\right), \qquad s \in S,$$

ima uklonjiv singularitet u $z = s$.

Dokaz.

Želimo naći funkciju f takvu da

$$f - h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$$

ima uklonjiv singularitet u $s \in S$.

Slijedi da f ima glavni dio Laurentovog razvoja oko s dan upravo s $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$.

Kako je S konačan skup, $f(z) = \sum_{s \in S} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$ ima oko svakog $s \in S$ glavni dio razvoja

$$h_s\left(\frac{1}{z-s}\right).$$

To je zato što je za $s' \neq s$, $h_{s'}\left(\frac{1}{z-s'}\right)$ analitička u $z = s$.

Kakva je veza s funkcijom f?

Znamo da $f - h$ ima uklonjive singularitete za $\forall s \in S$, a iz tog nam slijedi da je $f - h$ cijela tj. analitička funkcija na $\mathbb{C}$. Dobivamo $f = h + g$, gdje je g neka proizvoljna cijela funkcija.

Dokazali smo tvrdnju teorema 2.1.1. u slučaju da je S konačan skup.

$\square$

Primjer 2.1.4. *(Racionalna funkcija dana svojim razvojem u parcijalne razlomke)*

Poseban slučaj prethodnog teorema 2.1.3 *je* $h_s(z)$ *polinom stupnja* $m_s \geq 1$.

Budući je S *konačan skup možemo ga zapisati kao* $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$.

Pretpostavimo da je za $\forall s \in S$, $h_s(z)$ *polinom stupnja* $m_s \geq 1$.

Općenito vrijedi:

$$h_s(z) = b_{1,s}z + \ldots + b_{m_s,s}z^{m_s}.$$

Za svaki $s \in S$ *dobivamo slijedeće:*

$$h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) = b_{1,s}\left(\frac{1}{z-s}\right) + \ldots + b_{m_s,s}\left(\frac{1}{z-s}\right)^{m_s}.$$

Pozivamo se na dokaz teorema 2.1.3 *te dobivamo racionalnu funkciju danu svojim razvojem u parcijalne razlomke:*

$$f(z) = \sum_{s \in S} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$$

Teorem 2.1.5. *(Mittag - Lefflerov razvoj, M.G. Mittag - Leffler, 1877)*
Neka je $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ *beskonačni, diskretni, podskup skupa* $\mathbb{C}$ *takav da je* $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots, \quad \lim_n |s_n| = +\infty$. *Za svaku proizvoljnu točku* $s \in S$ *fiksiramo cijelu funkciju*

$$h_s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad h_s(0) = 0,$$

Tada postoji analitička funkcija

$$f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C},$$

s glavnim dijelom Laurentovog razvoja u svakoj $s \in S$ *definiranoj s* h_s, *a preko činjenice da*

$$f(z) - h_s\left(\frac{1}{z-s}\right), \qquad s \in S,$$

ima uklonjivu singularnost u $z = s$.

Dokaz. Neka je S beskonačni diskretni podskup skupa $\mathbb{C}$. Možemo prebrojati elemente od S te ih poredati po njihovom rastućem modulu,

$$S = \{s_1, s_2, \ldots\}, \qquad |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant |s_3| \leqslant \ldots$$

za $|s_i| > 0$. A ako se pojavljuje nula onda stavimo $s_0 = 0$.

Tada mora biti $|s_i| > 0, \quad S = \{s_0, s_1, \ldots\}, \quad 0 < |s_1| \leqslant |s_2| \leqslant \ldots$

Svaka od funkcija

$$z \longmapsto h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right), \qquad h_n := h_{s_n}, \quad n \geq 1 \ ,$$

je analitička u probušenom krugu $|z| < |s_n|$ i stoga se može prikazati kao red potencija.

Iskažimo i dokažimo lemu koja nam treba za sljedeći dio dokaza:

Lema 2.1.6.

Za svaki $n \geq 1$ postoji polinom P_n s kompleksnim koeficijentima, tako da

$$\left|h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad za \qquad |z| \leq \frac{1}{2}|s_n|.$$

Dokaz. Razvijemo $h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right)$ u red potencija oko nule

$$h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

Ovaj red konvergira uniformno na kompaktnom skupu $\overline{K}(0, \frac{1}{2}|s_n|)$. Zato za $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ postoji $l \geq 0$ tako da je

$$\left|h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - \sum_{k=0}^{l} a_k z^k\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

za svaki $z \in \overline{K}(0, \frac{1}{2}|s_n|)$.

Stavimo $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_k z^k$ i dokazali smo lemu.

$\square$

Vratimo se na dokaz teorema:
Zbog toga možemo izabrati P_n takav da za $n \geq 1$

$$\left| h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z) \right| \leq \frac{1}{n^2} \qquad za \qquad |z| \leq \frac{1}{2}|s_n|.$$

Uzmimo Taylorov polinom dovoljno velikog stupnja oko nule.
U idućem koraku definiramo funkciju

$$f := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

ako je $0 \in S$ jer tada pišemo $s_0 = 0$, odnosno

$$f := \sum_{n=1}^{+\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

ako $0 \notin S$.

Lema 2.1.7. *Red koji definira funkciju f konvergira lokalno na $\mathbb{C} \setminus S$ i zato definiramo analitičku funkciju. U točki $s \in S$, f ima glavni dio Laurentovog razvoja $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$.*

Dokaz. Kako je $\lim_n |s_n| = +\infty$, to za svaki $r > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $2r < |s_n|$ za $n \geq n_0$. To slijedi iz definicije limesa.

Pogledajmo nad kojim skupom definiramo f

$$\overline{K}(0,r)\backslash S = \overline{K}(0,r)\backslash\{s_1, s_2, \ldots, s_{n_0-1}\}$$

Znamo da je za $n \geq n_0 \quad r < \frac{1}{2}|s_n|$ iz čega nam slijede dvije tvrdnje:

a) $h_{s_n}\left(\frac{1}{z-s_n}\right)$ analitička na $\overline{K}(0,r)$

b) $\left| h_{s_n}\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z) \right| \leq \frac{1}{n^2}$ za svaki $n \in \overline{K}(0,r)$ prema prethodnoj lemi.

Tvrdnje a) i b) nam povlače da

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\left[h_{s_n}\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

konvergira uniformno na $\overline{K}(0, r)$.

Kako je r proizvoljan tada slijedi red koji definira f koja konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus S$.

Na kraju možemo vidjeti da oko zadanog $s_l \in S$ funkcija f ima glavni dio Laurentovog razvoja $h_{s_k}\left(\frac{1}{z - s_k}\right)$.

Najprije ako je $k = 0$, onda

$$f = h_{s_0}\left(\frac{1}{z - s_0}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[h_{s_n}\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

.

Za desni dio sume dokazali smo u prvom dijelu dokaza da je analitička na nekom krugu oko nule te zato ne utječe na glavni dio Laurentovog razvoja.

Odavdje slijedi razvoj od h_{s_0} u red potencija oko 0, glavni dio Laurentovog razvoja za f.

A ako je $k > 0$. Onda izaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $4|s_k| < |s_n|$, slično kao za r u prvom dijelu dokaza. Tada je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

analitička na $K(0, 2|s_k|)$ te ne utječe na singularitete od f unutar $K(0, 2|s_k|)$.

Uočimo da $s_k \in K(0, 2|s_k|)$.

$$f = h_0\left(\frac{1}{z - s_0}\right) + \sum_{n=1}^{n_0-1}\left[h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right] + \sum_{n=n_0}^{+\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right]$$

gdje je $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\left[h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right]$ analitička. Time smo dobili da je $\sum_{n=1}^{n_0-1}\left[h_n\left(\frac{1}{z - s_n}\right) - P_n(z)\right]$ konačan te sve svedemo na prethodno dokazani teorem.

$\square$

Budući da sve gore navedene procjene vrijede, f definira analitičku funkciju u domeni $\mathbb{C} \setminus S$ s propisanim singularnim ponašanjem u S.

□

Bilo koji red, koji je dobiven ovim postupkom zvat će se **Mittag-Lefflerov razvoj**.

Terminologija:
f je riješenje zadanog glavnog dijela Laurentovog razvoja.

Jedinstvenost: Ako je f riješenje zadanog glavnog dijela Laurentovog razvoja onda je i $f_0 = f + g$, s g kao proizvoljno cijelom funkcijom.

Ovo je opće riješenje zadanog glavnog dijela Laurentovog razvoja, zato što za dva različita riješenja f_0 i f za isti zadani glavni dio Laurentovog razvoja, razlika $f_0 - f =: g$ ima samo uklonjive singularitete (zadanog glavni dijelovi Laurentovog razvoja se pokrate u razlici u bilo kojoj točki u S), i zato je to cijela funkcija.
Suprotno tome, dodavanjem cijele funkcije ne mijenja se singularnost i odgovarajući zadani glavni dijelovi Laurentovog razvoja.

2.2 Mittag - Leﬄerov razvoj za funkciju $\pi/\sin\pi z$

Lema 2.2.1.

Za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijede sljedeće tvrdnje:
i.) $\frac{1}{sinz} = ctg\frac{z}{2} - ctgz$,
ii.) $\cos z = sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.

Dokaz.

i.) Lijeva i desna strana su analitičke funkcije na povezanom skupu $\mathbb{C} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Prema principu jedinstvenosti, zbog poznate činjenice da je $\frac{1}{sinx} = ctg\frac{x}{2} - ctgx$, za $x \in \mathbb{R}$ to vrijedi i za $z \in \mathbb{C}$.

ii.) Slično kao i prethodni dokaz.
Koristimo činjenicu da su $\cos z$ i $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ analitičke funkcije na $\mathbb{C}$ te jednakost: $cosx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ na $\mathbb{R}$.

Dobivamo traženo tj. da za $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos z = sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.

□

Lema 2.2.2. *Funkcija $f(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$ ima singularitete locirane u $S = \mathbb{Z}$, a svi oni su jednostavni polovi $n \in \mathbb{Z}$ sa glavnim dijelom*

$$h(z) = \frac{(-1)^n}{z - n}.$$

Dokaz. Red potencija za ovu funkciju (blizu nule!) je

$$\frac{(-1)^n}{z - n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \dots\right).$$

Želimo skratiti. U području $|z| \leq r$, $r > 0$, imamo $\left|\frac{(-1)^n}{z - n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \leq \frac{2r}{n^2}$ za $n \geq 2r$.

Tada je red

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left[\frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{n} \right]$$

Mittag - Lefflerov razvoj koji tražimo.

Iz estetskih razloga grupirat ćemo termine za n i $-n$ zajedno,
Imamo

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right]$$

Tvrdimo da je to upravo:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right]$$

Kako bismo dokazali gornju tvrdnju pozivamo se na Lemu 2.2.1 i dokazano svojstvo

$$\text{i.)}\ \frac{1}{\sin z} = ctg\frac{z}{2} - ctgz$$

te tvrdnju da je za $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\pi \operatorname{ctg} \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right] \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}
\end{aligned}$$

Naveden red je apsolutno (čak i normalno) konvergentan.

Za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin \pi z} &= \pi \cot \frac{\pi z}{2} - \pi \cot \pi z \\
&= \frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2}{z-2n} + \frac{2}{z+2n} \right) - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{2}{z-2n} + \frac{2}{z+2n} - \frac{1}{z-n} - \frac{1}{z+n} \right)
\end{aligned}$$

Puštanjem $k \longrightarrow \infty$ dokazali smo našu tvrdnju:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right].$$

$\square$

Primjer 2.2.3. *Također, iz gore pokazanog slijedi i Mitag - Lefflerov razvoj funkciju* $\frac{\pi}{\cos \pi z}$. *Funkcija* $\frac{\pi}{\cos \pi z}$ *ima singularitete locirane u* $S = \mathbb{Z}$, *gdje je* $s_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ *te dio*

$$h(z) = \frac{(-1)^n}{z - n + \frac{1}{2}}$$

Pozivamo se na gore dokazani Mittage - Lefflerov razvoj za funkciju $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ *te lemu* 2.2.1 *ii.)* $\cos z = sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.

Dobivamo Mittag - Lefflerov razvoj za funkciju $f(z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\cos \pi z} &= \frac{\pi}{\sin(\pi z + \frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi(z + \frac{1}{2}))} \\ &= \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{z + n + \frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Bibliografija

[1] Š., Ungar: *Kompleksna analiza.* Internet izdanje, 2009.

[2] E. Freitag, R. Busam: *Complex Analysis*. Springer, 2005.

[3] Kurepa, S., Kraljević H.: *Matematička analiza funkcija kompleksne varijable*. Tehnička knjiga, 1986.

Sažetak

Za svaku točku s diskretnog skupa S, koji je podskup skupa $\mathbb{C}$, imamo zadan glavni dio Laurentovog razvoja $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$. Dokazali smo da postoji analitička funkcija $f : \mathbb{C} \setminus S \longrightarrow \mathbb{C}$ koja u točkama $s \in S$ ima zadani glavni dio Laurentovog razvoja $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$. Tvrdnje smo dokazali za konačan i za beskonačan skup S.

Summary

For each point s of a discrete subset S, which is the subset of $\mathbb{C}$, we are given the main part of Laurent series $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$. We have proved that then there exists an analytic function $f:\mathbb{C}\setminus S\longrightarrow\mathbb{C}$ which in points $s\in S$ has got the given main part of Laurent series $h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$. Mathematical statements have been proved for infinite and finite S set.

Životopis

Rođena sam 08. lipnja 1986. godine u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu Većeslava Holjevca, a zatim X. prirodoslovno - matematičku gimnaziju u kojoj sam i maturirala 2005. godine. Također, 2005. godine upisujem PMF- Matematikčki odsjek. Diplomirala sam 2014. godine na diplomskom studiju Matematičke statistike.